جامعة ديالى
كلية التربية الاساسية
قسم الرياضيات

الاحتمالات المتقدمة

المرحلة الثانية

مدرس المادة

م.م اسراء عامر فليح

1/

المتغيرات العشوائية
Random Variables

مقدمة Introduction

ان النتائج التي نحصل عليها من خلال التجارب العشوائية أما ان تكون رقمية كما هو الحال في رمي حجر النرد او تكون نوعية كما هو في حالة رمي قطعة النقود اوورق اللعب وغيرها، وان هذه النتائج تدعى بالمتغيرات العشوائية التي تعبر عن كل تجربة، وعليه فان المتغير العشوائي يتم فيه الحصول على شيء من خلال التجربة العشوائية.

المتغير العشوائي Random variable

المتغير العشوائي هو الذي يأخذ قيماً حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فضاء العينة ومن ثم مجال هذا المتغير يشمل كل القيم الممكنة له ويكون لكل شيء من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين وبعبارة اخرى فان المتغير العشوائي يمثل دالة تنقل جميع قيم فضاء العينة الى قيم حقيقية ضمن الفضاء R_X والذي هو مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية.

ينقسم المتغير العشوائي الى قسمين هما

1. المتغيرات العشوائية المتقطعة Discrete Random Variables
2. المتغيرات العشوائية المستمرة Continous Random Variables

المتغيرات العشوائية المتقطعة Discrete Random variables

المتغير العشوائي المتقطع هو الذي يأخذ قيم بينية ومتباعدة ويرمز للمتغير العشوائي بشكل عام بحرف من الحروف الابجدية الكبيرة X, Y, Z ..... ويرمز للقيم التي يأخذها المتغير بالحروف الابجدية الصغيرة x, y, z ..... ومن امثلة هذه المتغيرات

a- عدد الاولاد الذكور في الاسرة المكونة من اربع اولاد X ،
$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

b. عدد العملاء الذين يتم انجاز خدمتهم البنكية كل ١٠ دقائق Y ،
$Y = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

c. عدد مرات استخدام نوع معين من الاسمدة خلال الدورة الزراعية C ، $C = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع
Probability Distribution for the Discrete Random variable

التوزيع الاحتمالي هو الذي يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن ان يأخذها المتغير والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فضاء العينة بمعنى آخر هو مجموعة من القيم الممكنة مع الاحتمالات المرتبطة بقيم المتغير.

فاذا كان المتغير العشوائي المتقطع X يأخذ القيم $X = x_1, x_2 .... x_n$ وكان $p(X = x_i) = f(x_i)$ هو احتمال ان المتغير العشوائي يأخذ القيمة x_i فانه يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X وهو جدول مكون من عمودين الاول به القيم الممكنة للمتغير $X = \{x_1, x_2 ... x_n\}$ والثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير $p(X = x_i) = f(x_i)$ ، اي ان جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع يكون بالشكل التالي :-

24

x_i	$f(x_i)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$
Σ	1

أو

X	x_1	x_2	x_3	......	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	---	$f(x_n)$

ملاحظة :- مجموع الاحتمالات يجب ان يساوي واحد

اي ان $\sum_x P(X=x) = \Sigma f(x_i) = 1$

مثال ① :- ألقي حجر نرد مرة واحدة . اوجد التوزيع الاحتمالي للنقط التي تظهر على السطح العلوي .

الحل :- نفرض ان X هو النقط التي تظهر على السطح العلوي

القيم الممكنة لـ X هي $x_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$P(X=1) = f(1) = \frac{1}{6}$ ، $f(X=2) = f(2) = \frac{1}{6}$

$f(X=3) = f(3) = \frac{1}{6}$ ، $f(x=4) = f(4) = \frac{1}{6}$

$f(X=5) = f(5) = \frac{1}{6}$ ، $f(X=6) = f(6) = \frac{1}{6}$

وعلى ذلك يكون التوزيع الاحتمالي هو

X	1	2	3	4	5	6	Σ
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}$

مثال ②: القيت قطعة نقود مرتين . اوجد التوزيع الاحتمالي لعدد مرات الحصول على كتابة .

الحل : نفرض ان X عدد مرات الحصول على كتابة
اذن القيم الممكنة لـ X هي $X_i = 0, 1, 2$

$$P(X=0) = f(0) = \frac{1}{4}$$
$$P(X=1) = f(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$P(X=2) = f(2) = \frac{1}{4}$$

وبذلك فان التوزيع الاحتمالي هو

X	0	1	2	Σ
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{4}$

مثال ③: القي حجري نرد مرة واحدة ، أوجد التوزيع الاحتمالي لمجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي .

الحل : نفرض ان X هي مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي
X تأخذ القيم $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$

اذن
$$P(X=2) = P(1,1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$
$$P(X=3) = P(1,2) + P(2,1) =$$
$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$$

$$P(X=4) = P(1,3) + P(3,1) + P(2,2)$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$$

$$P(X=5) = P(4,1) + P(1,4) + P(2,3) + P(3,2)$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$
$$= \frac{4}{36}$$

$$P(X=6) = P(5,1) + P(1,5) + P(3,3) + P(4,2) + P(2,4)$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$
$$= \frac{5}{36}$$

$$P(X=7) = P(6,1) + P(1,6) + P(2,5) + P(5,2) +$$
$$P(3,4) + P(4,3)$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$
$$= \frac{6}{36}$$

$$P(X=8) = P(4,4) + P(5,3) + P(3,5) + P(6,2) +$$
$$P(2,6)$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$
$$= \frac{5}{36}$$

$$P(X=9) = P(5,4) + P(4,5) + P(6,3) + P(3,6)$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$
$$= \frac{4}{36}$$

$$p(X=10) = p(5,5) + p(6,4) + p(4,6)$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$
$$= \frac{3}{36}$$

$$p(X=11) = p(6,5) + p(5,6) + p$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$
$$= \frac{2}{36}$$

$$p(X=12) = p(6,6) = \frac{1}{36}$$

وبذلك فان التوزيع الاحتمالي هو

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{36}$

مثال: 4 اشترى شخص 4 بطيخات ، فاذا كان احتمال ان تكون أي منها تالفة هو $\frac{2}{5}$. أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد البطيخ التالف .

الحل : نفرض ان X هو عدد البطيخ التالف

X تأخذ القيم 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4

$p(x=0) = p($الاولى جيدة$) \times p($الثانية جيدة$) \times p($الثالثة جيدة$)$
$\times\, p($الرابعة جيدة$)$

4

$$p(X=0) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{81}{625}$$

$$p(X=1) = 4\, p(\text{الاولى تالفة}) \times p(\text{الثانية جيدة}) + p(\text{الثالثة جيدة}) + p(\text{الرابعة جيدة})$$

$$= 4\left(\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}\right)$$

$$= 4 \times \frac{54}{625} = \frac{216}{625}$$

$$p(X=2) = 6 \times p(\text{الاولى تالفة}) \times p(\text{الثانية تالفة}) \times p(\text{الثالثة جيدة}) \times p(\text{الرابعة جيدة})$$

$$= 6\left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}\right)$$

$$= 6 \times \frac{36}{625} = \frac{216}{625}$$

$$p(X=3) = 4 \times p(\text{الاولى تالفة}) \times p(\text{الثانية تالفة}) \times p(\text{الثالثة تالفة}) \times p(\text{الرابعة جيدة})$$

$$= 4\left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5}\right)$$

$$= 4 \times \frac{24}{625} = \frac{96}{625}$$

$P(X=4) = p(\text{الأولى تالفة}) \times p(\text{الثانية تالفة}) \times p(\text{الثالثة تالفة}) \times$
$p(\text{الرابعة تالفة})$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{16}{625}$$

وبذلك فإن التوزيع الاحتمالي هو

x	0	1	2	3	4	Σ
$f(x)$	$\frac{81}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{625}{625}$

Probability Mass Function دالة الكتلة الاحتمالية

اذا كان X يمثل متغيراً "عشوائياً" متقطعاً يأخذ القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ باحتمال $f(x_i)$ حيث ان $i = 1, 2, \dots, n$ فان الدالة $f(x_i)$ تسمى دالة الكتلة الاحتمالية (او الدالة الاحتمالية) للمتغير العشوائي المتقطع X ، ومن خصائص هذه الدالة انها تحقق الشروط التالية :

1. $f(x) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in X$
2. $\sum_{\forall x \in X}^{n} f(x_i)$

ويمكن تمثيل دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع ليس من خلال منحنى وانما من خلال اعمدة متوازية على محور X .

مثال (1) :- اذا كان X يمثل متغيراً "عشوائياً" متقطعاً يمثل الحصول على وجه الكتابة عند رمي قطعة نقود مرتين ، كوّن دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير X ؟ وارسم الدالة

الحل : بما ان فضاء العينة $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

فان المتغير العشوائي يأخذ القيم التالية $X = 0, 1, 2$

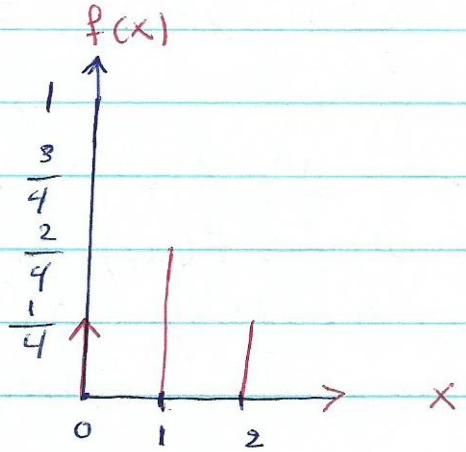
وعليه يكون

$$P(X=0) = f(0) = \frac{1}{4}$$
$$P(X=1) = f(1) = \frac{2}{4}$$
$$P(X=2) = f(2) = \frac{1}{4}$$

وبذلك يمكن ان نضع جدولاً لدالة الكتلة الاحتمالية مع المتغير العشوائي الخاص بها

X	0	1	2	Σ
f(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{4}$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بالرسم



مثال ②: لتكن الدالة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

اثبت انها دالة كتلة الاحتمالية ؟

الحل: حتى نثبت بان $f(x)$ دالة كتلة الاحتمالية يجب ان تحقق الشرطين

① $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{10}$, $f(2) = \frac{2}{10}$

$f(3) = \frac{3}{10}$ $f(4) = \frac{4}{10}$

اي ان

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in X$$

بمعنى آخر $\therefore \quad X \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

وبذلك تحقق الشرط الاول

② $\sum f(x) = 1$

$$\sum_{x=0}^{4} f(x) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$$

$$= 0 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10}$$

$$= \frac{10}{10} = 1$$

وبذلك تحقق الشرط الثاني

$\therefore$ الشرطان متحققان وعليه فان $f(x)$ دالة كتلة احتمالية

مثال ③ : لتكن

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{K} & x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

دالة كتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X ، اوجد قيمة K ثم ارسم الدالة ؟

الحل : من الشرط الثاني

$$\sum_{i=1}^{5} f(x_i) = 1$$

وعليه فان

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1$$

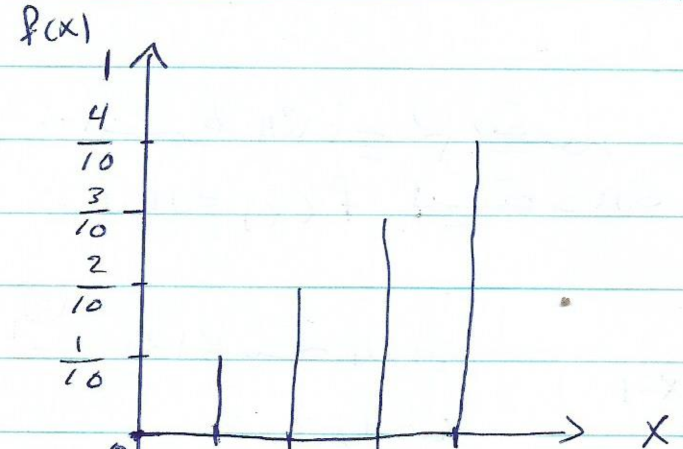
$$\frac{0}{K} + \frac{1}{K} + \frac{2}{K} + \frac{3}{K} + \frac{4}{K} = 1$$

$$\frac{10}{K} = 1 \Rightarrow K = 10$$

وبذلك تصبح الدالة

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{10} & x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

اما رسم الدالة



مثال ④ : اذا اعطينا الدالة التالية

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} & x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

هل الدالة $f(x)$ دالة كتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X ؟

الحل : لاثبات ان الدالة $f(x)$ دالة الكتلة الاحتمالية يجب ان تحقق الشروط التالية

① $\because x > 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} > 0$

$f(x) > 0$ اي ان

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{2} \\ f(2) &= \frac{1}{6} \\ f(3) &= \frac{1}{18} \end{aligned}\right] > 0$$

$\therefore f(x) > 0$

② $\sum_{i=1}^{3} f(x_i) = 1$

$f(1) + f(2) + f(2)$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$

$= \frac{9+3+1}{18} = \frac{13}{8} \neq 1$

$\therefore \sum f(x) \neq 1$

∴ الشرط الثاني لم يتحقق

∴ الدالة $f(x)$ ليست دالة كتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X

H.W مثال ⑤ : اذا كانت الدالة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} & x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

هل الدالة $f(x)$ تمثل دالة كتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X

مثال ⑥ اذا اعطينا الدالة التالية

$$f(x) = \begin{cases} y^{x} (1-y)^{1-x} & x = 0,1 \quad , \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

هل الدالة $f(x)$ تمثل دالة كتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X ؟

الحل :-

① $\because x \geq 0 , y > 0$

$\therefore y^{x} \geq 0$ and $(1-y)^{1-x} \geq 0 \Rightarrow y^{x}(1-y)^{1-x} \geq 0$

$\therefore f(x) \geq 0$

② $\sum_{x=0}^{1} f(x) = 1$

$f(0) + f(1)$

$y^{0}(1-y)^{1} + y^{1}(1-y)^{0}$

$1 - \cancel{y} + \cancel{y} = 1$

$\therefore \sum f(x) = 1$

$\therefore$ تحقق الشرطان

وهذا يؤدي الى ان الدالة $f(x)$ تمثل دالة كتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X

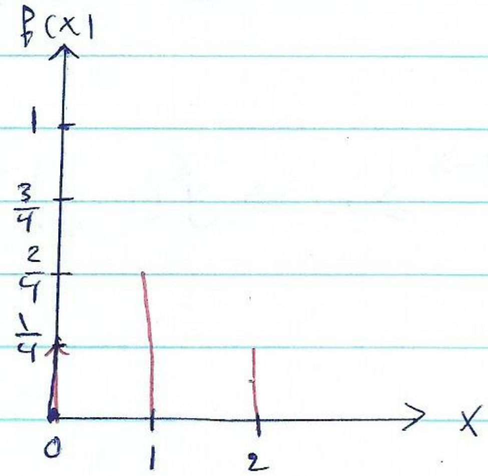
مثال ⑦ :- مثل بيانياً دوال الاحتمالية لـ X عدد مرات الحصول على الصورة و Z الفرق بين عدد الصور وعدد الكتابة عند القاء قطعة نقود مرتين

الحل :-

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

$X = 0, 1, 2$

X	0	1	2	Σ
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{4}$



$Z = 0, 2, -2$

Z	0	2	-2	Σ
$f(z)$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{4}$

HH - 0 = 2

HT - TH = 0

TH - HT = 0

0 - TT = -2